2.8.2 Druhá mocnina I

Předpoklady: 020801

Pedagogická poznámka: První příklad je nutné zadat než se na projektoru objeví nadpis hodiny (projektor pouštím až na čtvrtý příklad).

Př. 1: Doplň další čísla do číselné řady: 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

Doplnění číselné řady: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, …

Dvě zdůvodnění:

- k předchozímu číslu přičítáme postupně lichá čísla: $4 = 1 + 3$, $9 = 4 + 5$, $16 = 9 + 7$, …
- řadu tvoří čísla, která získáme tím, že postupně násobíme přirozená čísla sama sebou: $1 = 1 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, $16 = 4 \cdot 4$, …

Př. 2: Porovnej výhody a nevýhody obou postupů při určování dalších členů řady.

Přičítání lichých čísel:

- výhoda: u větších čísel je to snazší, než násobení dvou velkých čísel mezi sebou,
- nevýhody: musím spočítat všechny předchozí členy řady, jakmile uděláme u jednoho členu chybu, budou špatně i všechny následující členy.

Násobení čísla samo se sebou:

- výhoda: nemusíme počítat všechny předchozí členy, chyba u jednoho členu neznamená chybu u dalších členů,
- nevýhody: u větších čísel složitějších výpočet.

Pedagogická poznámka: Žáci samozřejmě nevědí, že diskutují o vyjádření členů posloupnosti (rekurentním a pomocí *n*-tého členu), přesto na výhody i nevýhody rychle přijdou.

Pokud číslo násobíme samo se sebou, získáme jeho druhou mocninu.

Druhou mocninou čísla *a* je číslo $a \cdot a = a^2$.

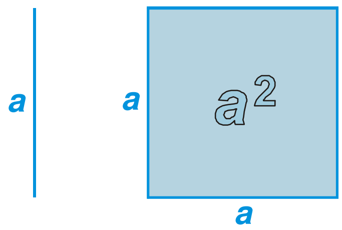
Př. 3: Kde v geometrii používáme druhou mocninu?

Druhou mocninu používáme při výpočtu plochy čtverce.

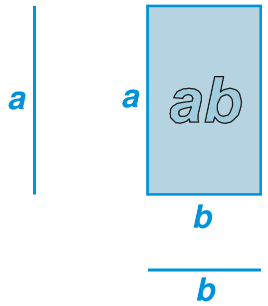
Př. 4: Druhá mocnina se někdy označuje jako kvadrát (z latinského quadratum – čtverec). Co znamená „blbnout na kvadrát“?

Blbnout opravu hodně (blbnout na druhou).

Druhá mocnina hraje v matematice velmi důležitou roli, proto ji budeme často zobrazovat graficky. Pomůže nám vzorec z předchozího příkladu – druhou mocninu můžeme znázornit jako obsah čtverce o straně *a*.

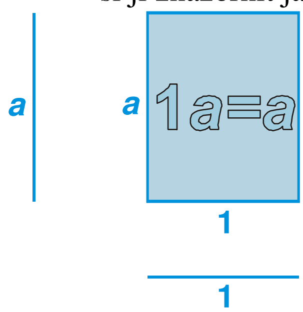


Podobně můžeme znázornit součin ab jako obsah obdélníku o stranách a, b.



Když si místo neznámé strany b zvolíme stranu o délce 1, získáme obdélník o obsahu $a \cdot 1 = a$. Neznámá a tedy může představovat dvě různé věci:

- pokud jde o samotnou proměnou a, představuje délku a můžeme si znázorňit jako úsečku o délce a,
- pokud jde o proměnou, která vznikla násobením $a \cdot 1 = a$, představuje obsah a můžeme si ji znázornit jako obdélník o stranách a a 1.



O kterou z možností se jedná poznáme buď z předcházejících výpočtů, významu výrazu nebo z ostatních členů výrazu podle základního pravidla, že sčítat, odčítat a porovnávat můžeme pouze členy, které představují „to samé“:

- ve výrazu: $o = a + b + c$ (obvod trojúhelníku) představuje člen a délku strany trojúhelníku (sčítáme jej s dalšími členy, které představují opět strany a výsledkem je obvod trojúhelníku. Všechny členy tedy představují délky).
- ve výrazu: $S = ab + a$ člen a zřejmě představuje obsah obdélníku (o stranách a a 1), protože jej sčítáme s členem ab (obsah obdélníků) a výsledkem je obsah nějakého obrazce.

Pedagogická poznámka: Určitě se někdo zeptá, jak poznáme délku strany a (můžeme si ji zvolit libovolně, protože a je neznámé číslo) nebo jestli musí mít strana o délce 1 přesně 1 cm (nemusí, protože a je libovolná, můžeme si i libovolně zvolit měřítko nákresu).

Dodatek: Obdélníků o obsahu a je nekonečně mnoho (například obdélník o stranách $2a$ a $0,5$). Pokud tento problém nikdo nevytáhne, nezabýváme se tím a spokojíme se s obdélníkem o stranách a a 1.

Př. 5: Doplň do tabulky druhé mocniny.

x	0	5	7	8	9	11	-2	0,1	-10	0,5	-5
x^2											

x	0	5	7	8	9	11	-2	0,1	-10	0,5	-5
x^2	0	25	49	64	81	121	4	0,01	100	0,25	25

Př. 6: Vypočti druhé mocniny čísel v tabulce. Hledej pravidlo. Kde jsme se s něčím podobným setkali?

x	10	100	1 000	10 000
x^2				

x	10	100	1 000	10 000
x^2	100	10 000	1 000 000	100 000 000

Druhá mocnina má dvojnásobných počet nul než původní číslo.
Jde o stejnou situaci jako při převodech jednotek plochy (čtverečních jednotek). Převodní vztahy mají dvojnásobný počet nul než převodní vztahy mezi jednotkami délky (právě kvůli tomu, že obsah čtverce je druhá mocnina délky strany).

Př. 7: Vypočti druhé mocniny čísel v tabulce. Hledej pravidlo. Kde jsme se s něčím podobným setkali?

x	0,1	0,01	0,001	0,000 1
x^2				

x	0,1	0,01	0,001	0,000 1
x^2	0,01	0,000 1	0,000 001	0,000 000 01

Druhá mocnina desetinného čísla má dvojnásobný počet desetinných míst než původní číslo.
Opět jde o stejnou situaci jako u převodů jednotek.

Př. 8: Doplň do tabulky druhé mocniny.

x	1	50	0,4	800	-3	1,4	-20	0,04	-500	0,11	-0,08
x^2											

x	1	50	0,4	800	-3	1,4	-20	0,04	-500	0,11	-0,08
x^2	1	2500	0,16	640000	9	1,96	400	0,0016	250000	0,0121	0,0064

Př. 9: Rozhodni, zda jsou pravdivé následující výroky.
a) Druhá mocnina libovolného čísla je kladné číslo.
b) Druhá mocnina libovolného čísla je větší než toto číslo.
c) Druhá mocnina lichého přirozeného čísla je liché přirozené číslo.
d) Druhá mocnina sudého přirozeného čísla je sudé přirozené číslo.
e) Druhá mocnina sudého přirozeného čísla je číslo dělitelné čtyřmi.
Všechna rozhodnutí zdůvodni.

Řešení je uvedeno v následující hodině.

Shrnutí: Součin čísla samo se sebou nazýváme druhá mocnina.